

Una herramienta para valorar la producción de los estudiantes ante tareas de invención de problemas aritméticos verbales

Johan Espinoza González.
jespinoza@una.cr
Universidad Nacional de Costa Rica.

Resumen: Los Programas de Estudio de estudio vigentes para la Enseñanza de la Matemática en Costa Rica, proponen el planteamiento de problemas como uno de los cinco procesos matemáticos complementarios a la resolución de problemas. Así, en este estudio se presenta en qué consiste este proceso y en qué momento de la clase podría emplearse. También se expone una herramienta que permite valorar las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas. Los resultados muestran el gran valor educativo que presenta la invención de problemas como actividad matemática dentro del salón de clase y cómo la herramienta de valoración presentada aquí es útil para caracterizar los problemas inventados por los estudiantes y evaluar el grado de profundización y apropiación que tienen los estudiantes de los conocimientos enseñados en clases.

Palabras claves: Resolución de problemas, invención de problemas, Educación Matemática

Introducción

Recientemente se observa un progreso en el desarrollo de enfoques de instrucción que incorporan la invención de problemas como una actividad de clase (Brown y Walter, 1990; Silverman, Winograd y Strohauer, 1992; Skinner, 1991). En este sentido, los programas vigentes para la enseñanza de la matemática propuestos por el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), proponen este tipo de actividades como uno de los cinco elementos fundamentales en el proceso de resolución de problemas.

De hecho, varias habilidades específicas o indicaciones puntuales especificadas en dichos programas, hacen referencia a que los estudiantes planteen problemas a partir alguna situación presentada de forma textual o gráfica (ilustración), o a partir de operaciones aritméticas.

El interés por incorporar este tipo de actividades en clases de matemática no es nuevo, ya que los estándares sobre el currículo y evaluación para las matemáticas escolares (NCTM, 1989) y los estándares profesionales para la enseñanza de la matemática (NCTM, 1991), sugieren un incremento de esta en las clases de matemática.

De igual forma, algunos distinguidos matemáticos e investigadores en educación matemática (Freudenthal, 1973; Polya, 1954; Brown y Walter, 1990; Ellerton 1986; NCTM, 2000; Polya 1979), reconocen la invención de problemas como actividad importante dentro de la experiencia matemática de los estudiantes y mencionan el gran valor educativo, a lo largo del tiempo, que tiene el que los estudiantes de todos los niveles inventen problemas en clase.

Sin embargo, se ha prestado poca atención a cómo valorar las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas (Silver & Cai, 2005). Al respecto, se pueden citar los estudios de Leung & Silver (1997),

Ellerton (1988), Cázares (2000) y Espinoza (2011), que muestran algunas herramientas y estrategias generales que se pueden emplear para estudiar la complejidad y características de las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas.

De esta forma, se presenta una herramienta que permite valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención aritméticas verbales y que ha sido empleada en Espinoza (2011) para caracterizar estudiantes con talento matemático.

A continuación se exponen algunas ideas relacionadas con el proceso de invención de problemas, las variables de estudio de los problemas aritméticos y algunos estudios previos referentes al problema de investigación aquí presentado. Esto servirá de base teórica para sustentar la herramienta de evaluación empleada y de la cual se presenta un ejemplo práctico de su uso.

1. Invención de problemas matemáticos

Desde hace varias décadas se da un mayor énfasis a la resolución de problemas como una actividad central de la matemática escolar (NCTM, 1980, 1989) y es tal que en todas las clases de matemática de cualquier país se puede observar a los estudiantes resolver problemas matemáticos (Silver, 1994). A partir de ahí surgen diversas líneas de investigación en resolución de problemas, entre las cuales, la invención de problemas matemáticos es una de ellas (Castro, 2008). Pero ¿en qué consiste este proceso? ¿Cuáles son las interpretaciones que se le han dado?

El término invención de problemas, también conocida en la literatura en inglés como “*problem posing*” (Brown y Walter, 1993; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; English, 1997), es usada para referirse tanto a la formulación de nuevos problemas, como a la reformulaciones de situaciones dadas (Silver, 1994; English, 1997; Silver y Cai, 1996).

En este sentido los estudiantes pueden inventar problemas durante la solución de un problema complejo (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996) o al realizar algunos cambios al mismo. Por ejemplo, podrían reformular el problema y personalizarlo (Silver, 1994), cambiando el tipo de número o simplificando la situación a un caso particular, con el objetivo de facilitar la solución del mismo. Al respecto, en el trabajo de Polya (1979), aparece esta componente al cuestionar ¿cómo podemos plantear el problema de manera diferente?, ¿cómo variar el problema descartando parte de la condición?

Este proceso también puede ocurrir antes de resolver un problema, cuando lo que se persigue no es la solución, sino la creación de uno a partir de una situación o experiencia (Silver, 1994). Un ejemplo de este tipo particular de invención de problemas fue realizado por Cázares (2000), quien presentó a 14 estudiantes de primaria varias tarjetas con diferentes ilustraciones de situaciones relacionadas con el contexto del estudiante, de las cuales debían escoger algunas y plantear varios problemas matemáticos.

Por último, se podría emplear después de la solución de un problema, en el cual se modifica el objetivo, meta o condición con el fin de generar nuevas situaciones (Silver, 1994). Al respecto se puede mencionar el estudio de Brown y Walter (1993) y su estrategia “¿What if not?”, la cual consiste en cambiar las condiciones y restricciones de una determinada situación para plantear nuevos e interesantes problemas.

Por otra parte, Stoyanova (1998), identifica tres categorías de experiencia de planteamiento de problemas que permiten estudiar el conocimiento y habilidades matemáticas de los estudiantes para

generar y resolver problemas matemáticos: situación libre, situación semi-estructurada y situación de planteamiento de problemas estructurada. En la primera los estudiantes plantean problemas sin ninguna restricción, en la segunda y tercer actividad los estudiantes trabajan con base en alguna situación, experiencia o información cuantitativa. Lo que cambia en estos dos últimos tipos es el nivel de estructuración de la tarea propuesta.

Por último, es importante mencionar que al hecho de inventar problemas se le ha dado distintas denominaciones por diferentes autores. Así se le ha designado como generación de problemas o reformulación de problemas dados (Silver, 1994), formulación de problemas (Kilpatrick, 1987) y planteamiento de problemas (Brown y Walter, 1990). A nuestro parecer, estas denominaciones hacen referencia al mismo hecho, inventar problemas, por lo que utilizaremos con más frecuencia la expresión invención de problemas.

También, se puede decir que la invención de problemas es un proceso matemático que tiene lugar, bien, durante la resolución de un problema matemático, luego de resolver un problema o cuando el sujeto se enfrenta ante una situación conocida previamente, para la cual no hay una formulación matemática.

2. Una estrategia para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas aritméticos

Dado que en este trabajo se centra en presentar una herramienta para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas matemáticos aritméticos, es que consideramos pertinente estudiar la noción de problema matemático y aritmético que consideraremos en nuestro estudio; así como algunas variables de estudio de los problemas aritméticos. Esto con el fin de definir las categorías y el esquema empleado para valorar las producciones de los estudiantes.

Con respecto a la noción de problema aritmético, se adoptó la noción propuesta por Castro (1991), quien señala cinco componentes que debe incluir una situación para ser considerada un problema matemático: una proposición (enunciado oral o escrito); unos datos conocidos; una intención (movilizar una o más personas para que lo resuelvan); una meta (llegar a un resultado) y un proceso (modo de actuación para alcanzar el resultado).

Con respecto a la noción de problema aritmético, se asume la definición propuesta por Puig y Cerdán (1988), quienes consideran que es aquel enunciado verbal o escrito en el cual la información proporcionada es de carácter cuantitativo, pues los datos suelen ser cantidades definidas generalmente de forma numérica. La condición implicada en el enunciado expresa relaciones cuantitativas entre los datos y la pregunta se refiere al cálculo de una o varias cantidades o relaciones entre cantidades.

Una vez presentada la noción de problema matemático y aritmético adoptada, se presenta a continuación algunas variables que son de interés particular en el estudio de los problemas aritméticos verbales.

2.1 Variables de estudio en los problemas aritméticos verbales

Algunas investigaciones ponen de manifiesto variables de estudio que son de interés en los problemas aritméticos. Al respecto, Puig y Cerdán (1988) destacan las variables sintácticas que están relacionadas con el orden y relaciones de las palabras y símbolos que contiene el enunciado del problema, como son la longitud del enunciado, complejidad gramatical, presentación de los datos,

ubicación de la pregunta, relación del orden en el que aparecen los datos en el problema y la secuencia operatoria para resolverlo, etc.

Castro (1995), menciona otra variable que denomina proposiciones interrogativas. Una proposición es interrogativa cuando pregunta o interroga sobre el valor numérico de una cantidad y puede hacerse sobre una asignación o relación. En el primer caso se desconoce la cantidad asignada y la pregunta demanda que se halle ese valor, por ejemplo ¿cuánto tiempo tardó Daniel en darle una vuelta a la pista? En el segundo caso, la interrogación se hace sobre la cuantificación de la comparación entre dos cantidades relacionadas, por ejemplo ¿cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel?

Silver y Cai (2005) agregan un tercer tipo de proposición interrogativa denominada denominada condicional, en la cual la pregunta establece una condición entre dos elementos, por ejemplo ¿Si María recorrió 300 metro más que Pedro, cuántos metros recorrió María? Estos autores asocian esta variable con la complejidad lingüística de un problema.

Otra variable de interés es la componente semántica (Nesher 1982, citado en Puig y Cerdán, 1988). Ésta se puede clasificar según su estructura operatoria en aditiva o multiplicativa.

Por último, Castro et al., (1992), señalan la información proporcionada y la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta como otra variable a considerar. En el primer criterio destacan la variable relacionada con los datos numéricos en la información, la cual puede distinguirse según el conjunto y tamaño de los números, la inclusión de datos superfluos, entre otros.

En cuanto a la secuencia operatoria que relaciona la información con la pregunta, los autores mencionan variables como las operaciones necesarias para la obtención del resultado y el algoritmo empleado en cada operación. Castro et al., (1997) hace referencia a esta variable y menciona que si los cálculos necesarios para resolver un problema aritmético implican sólo adiciones y multiplicaciones entonces es un problema de dos procesos.

2.2 Categorías de análisis para valorar las producciones

De acuerdo con el estudio presentado en la sección anterior, existen algunos elementos que se pueden tomar en cuenta al momento de valorar las producciones de los estudiantes cuando inventan problemas aritméticos. A continuación se presenta una descripción de las categorías que proponemos con sus respectivas variables de estudio.

2.2.1 Estructura sintáctica

La primera categoría considerada es la estructura sintáctica del problema, la cual se analizó con base en tres variables: longitud del enunciado, tipo de proposición interrogativa y tipo de número empleado.

- Longitud del enunciado: En esta variable se utilizó como indicador el número de proposiciones presentes. Las proposiciones hacen referencia a aquellas expresiones explícitas en el texto del enunciado que asignan un valor numérico o una cantidad a una variable, o bien, establece una relación cuantitativa entre dos variables. Cada una de estas expresiones aportan un dato al problema; sin embargo, algunas podrían no ser utilizadas en la solución del mismo por aportar un dato superfluo. Algunos ejemplos de proposiciones son, “el tren viaja a una velocidad de 348 km/h”, “Pedro corrió 300 metros más que Roberto” “María tiene el doble de caramelos que Juan”.

- Tipo de proposición interrogativa: Ésta variable corresponde a la manera en que el estudiante hace la pregunta del problema que inventó y se estudió de acuerdo con la presencia de proposiciones de asignación, condicionales o relacionales. Una proposición interrogativa de asignación podría ser “cuántas personas viajaban en el tren”, una relacional es una declaración como ¿cuántas veces tiene María las canicas que tiene Daniel? mientras que una condicional es una declaración como “Si María recorrió 300 metros más que Pedro, cuántos metros recorrió María”.

Es importante destacar de acuerdo con Silver y Cai (2005), los problemas con proposiciones relacionales y condicionales tienden a ser más difíciles de resolver por los estudiantes que aquellos que contienen sólo proposiciones de asignación.

- Tipo de número empleado: En esta variable se estudia el tipo de número presente en el enunciado, el cual puede ser números naturales y/o números racionales expresados en notación decimal y/o fraccionaria. De igual forma se estudia el uso de más de un tipo de número en los problemas propuestos por los estudiantes.

2.2.2 Estructura matemática

La segunda categoría considerada corresponde a la estructura matemática del problema, la cual será estudiada con base en cuatro variables: tipo de estructura operatoria y número de etapas, cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema, cantidad de pasos distintos para resolver el problema.

- Tipo de estructura operatoria: Esta variable se puede clasificar de acuerdo a la estructura aditiva y/o multiplicativa y al número de etapas del problema. Así los problemas pueden clasificarse en: aditivos de una etapa, multiplicativo de una etapa, aditivos de más de una etapa, multiplicativo de más de una etapa o problemas mixtos.
- Tipo de operación y cantidad de procesos de cálculo distintos implicados en la solución del problema: Como parte del análisis matemático, se toma en cuenta las operaciones necesarias para resolver el problema, así como determinar la cantidad de procesos distintos de cálculo requeridos para resolver el problema. En este sentido, si los cálculos necesarios para resolverlo implican sólo operaciones aditivas y multiplicativas, entonces consideramos que se trata de un problema de dos procesos (Castro et al., 1997).
- Cantidad de pasos distintos para resolver el problema: Esta variable corresponde a la cantidad de pasos distintos para resolver el problema y consideramos que dos pasos son iguales si éstos conllevan el mismo procedimiento de cálculo.

Esta variable fue considerada porque cada paso distinto necesario para resolver el problema implica una relación semántica y un problema que contiene tres relaciones semánticas (iguales o distintas) puede ser más rico que otro con dos relaciones semánticas (iguales o distintas). Además, la cantidad de pasos puede condicionar la extensión en la resolución del problema.

2.2.3 Estructura semántica

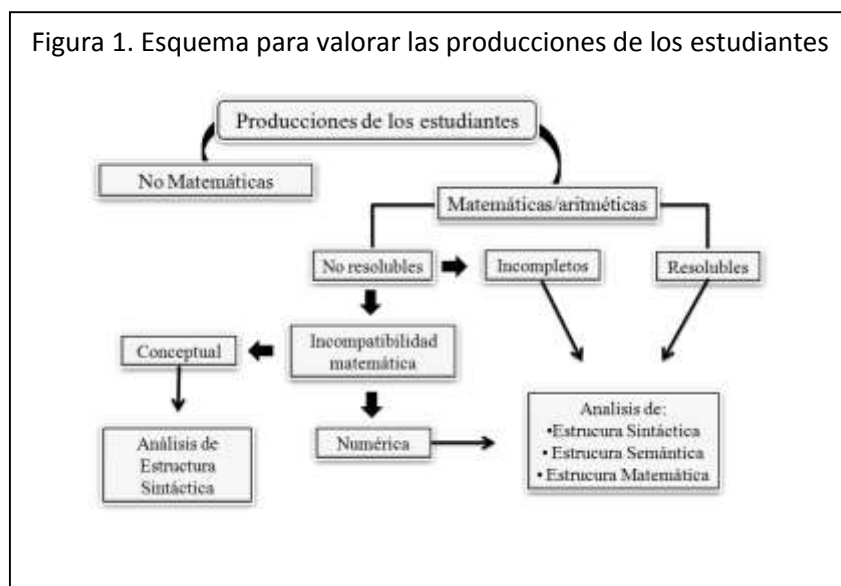
Por último, los problemas pueden ser valorados de acuerdo a su estructura semántica. En este caso, un problema de estructura aditiva puede clasificarse como de combinación, cambio, comparación y/o igualdad (Puig & Cerdán, 1988). De igual forma los problemas de estructura multiplicativa se pueden clasificar en isomorfismo de medida, comparación multiplicativa y producto de medidas.

En esta categoría también se estudia la cantidad de relaciones semánticas distintas presentes en el enunciado, de manera que si un problema involucra las siguientes relaciones semánticas: combinación, isomorfismo de medida y combinación; entonces se considera un problema con dos relaciones semánticas distintas.

Una vez presentado la concepción de problemas aritmético concebido en este estudio, así como un estudio de los problemas aritméticos y las categorías de análisis, se procede a describir el esquema empleado para valorar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas aritméticos verbales.

2.3 Esquema para valorar las producciones de los estudiantes

En primera instancia se deben catalogar las producciones de los estudiantes en matemáticas/aritméticas o no. Luego, los problemas matemáticos/aritméticos se clasifican en no resolubles o resolubles. Los primeros pueden no ser resolubles ya sea por ser incompletos (Puig & Cerdán, 1988) o porque presentan alguna incompatibilidad matemática de tipo numérica o conceptual (Espinoza, 2011). A los problemas matemáticos resolubles y no resolubles clasificados como incompletos o que presentan incompatibilidad matemática de tipo numérica se les puede aplicar el análisis de la estructura sintáctica, semántica y matemática explicado anteriormente. Mientras que los problemas matemáticos que presentan incompatibilidad matemática de tipo conceptual pueden ser analizados sólo desde su estructura sintáctica, pues no era posible analizar la estructura semántica y matemática. Cabe mencionar que es importante analizar las producciones de los estudiantes que son no resolubles, ya que algunas de ellas pueden presentar características importantes de analizar.



3. Un ejemplo práctico del uso de la estrategia

A continuación se presenta un ejemplo práctico que ilustra el uso de las categorías de análisis y el esquema que se propone en este trabajo para analizar las producciones de los estudiantes ante tareas de invención de problemas aritméticos.

Supongamos que se les plantea a los estudiantes la siguiente situación:

De acuerdo con la información de la siguiente figura, inventa un problema matemático que te parezca difícil de resolver y que en su resolución se utilice una o varias de las operaciones de suma, resta, multiplicación o división. Si lo consideras necesario puedes agregar más datos o información.



Figura 1 Imagen presentada en la primera tarea de invención de problemas

A partir de esta ilustración un estudiante inventa el siguiente problema:

“Si tres chicos giran en torno a una plaza y una vuelta son 80 metros, si el primer niño consigue dar 17 vueltas y la siguiente niña 29 y en total han hecho entre todos 5000 metros ¿Cuántas vueltas ha dado el 3° niño?”

En primera instancia se clasifica el problema como matemático y aritmético, ya que cumple con las características propuestas por Castro (1991) y Puig & y Cerdán (1988). Luego se analiza si es resoluble o no. En este caso, el problema tiene solución, por lo que se le aplicará un análisis según su estructura sintáctica, semántica y matemática.

En la siguiente tabla se muestra la valoración del problema de acuerdo con cada variable de estudio.

Tabla 1. Valoración del problema de acuerdo con las variables de estudio

Cantidad de proposiciones	5 (Subrayadas en el enunciado)
Tipo de número	Naturales
Tipo de proposición interrogativa	Asignación
Cantidad de pasos distintos	4
Cantidad de procesos	4 (+, -, x, :)
Estructura operatoria	Mixta
Cantidad de relaciones semánticas	2 (Isomorfismo de medidas y cambio)

Conclusiones

En primera instancia se considera que la invención de problemas es una actividad matemática reconocida por varios autores, quienes destacan su importancia como actividad relevante de clase y parte significativa de la experiencia matemática de cualquier estudiante. A pesar de ello, existen pocos estudios que aborden el cómo valorar las producciones de los estudiantes ante este tipo de tareas, la cual es una tarea tan importante como elaborar situaciones de planteamiento de problemas.

Quizás esto se deba a la gran laboriosidad que representa construir una herramienta para valorar la producción de los estudiantes, pues requiere de un estudio profundo y detallado de las variables que influyen en la construcción de un determinado problema, el cual depende del contenido matemático implicado en el mismo. Este trabajo es aún más complejo si se solicita plantear problemas a través de una situación libre de invención de problemas.

Por otra parte, se concluye que la herramienta presentada en este documento es un instrumento que permite caracterizar los problemas aritméticos planteados por los estudiantes, así como la complejidad de los mismos. Esto podría servir de base para evaluar y valorar el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes luego del proceso de instrucción o también como una herramienta de diagnóstico que se puede emplear antes de iniciar un tema.

De igual forma, podría emplearse en la identificación de niños con talento matemático, pues la herramienta logra establecer diferentes niveles de complejidad en la resolución del problema planteado; sin embargo, es necesario un estudio más profundo sobre la misma que permita garantizar su uso en la caracterización del talento matemático.

Bibliografía

- Brown, S. & Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Brown, S. & Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Castro, E (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En Luengo Ricardo; Gómez Bernardo; Camacho Matías; Blanco Lorenzo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140). Basajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper”/ Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. *Memoria de Tercer Ciclo*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Castro, E. (1995). Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa. Tesis doctoral. Granada: Comares.
- Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutierrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., et al. (1997). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Primer simposio nacional de la SEIEM* (pp 63-76). Granada: SEIEM.

- Castro, E., Rico, L. & Gil, F., (1992). Enfoque de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las ciencias*, 10(3), 243-253.
- Cázares, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. Memoria de tercer ciclo.* Granada: Universidad de Granada.
- Ellerton N. (1986). Children's made up mathematics problems- A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 261-271.
- English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, 34, 183-217.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht. Reidel.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education.* (pp 123-148). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Leung, S., Silver, E (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School of Mathematics.* Reston, VA: El autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston, VA: El autor.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: El autor
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning.* Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos.* Madrid: Síntesis.
- Silver y Cai (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12(3), 129-135.
- Silver, E. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., Kenney, P (1996). Posin mathematical problem: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education.* 27(3), 293-309.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*. (pp 164-185). Edit Cowan University: MASTEC.