

Elementos a considerar en el planeamiento didáctico al implementar la Resolución de Problemas

Marianela Zumbado Castro
Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica
Universidad Estatal a Distancia
mzumbad2@gmail.com

Resumen: A continuación, se presenta una propuesta de planeamiento didáctico acorde con los programas de Matemáticas aprobados en el 2012. Es un *plan de lección o minuta*¹ para décimo año, sobre algunos conocimientos de la función lineal. Se trabajan de manera integrada mediante un problema contextualizado tres habilidades específicas. Se expone el problema, la posible solución, los elementos teóricos para el cierre o clausura. Además, ejercicios y problemas de diferentes niveles de complejidad para la etapa de movilización y aplicación de los conocimientos.

Palabras claves: Planeamiento didáctico, Resolución de problemas, Organización de la lección

Introducción

A partir del 2012, con la aprobación de los nuevos programas de Matemáticas, se propone una nueva organización de la lección, esta propuesta es diferente al trabajo que se realizaba en las aulas de manera tradicional.

La clase de Matemáticas ha tenido la siguiente estructura: el o la docente imparten de manera magistral el concepto o contenido, empleando dos o tres ejemplos, muestra a sus estudiantes cómo debe usarlo, posteriormente, asigna un material de práctica del concepto o contenido impartido, ese material puede haber sido producido, seleccionado o simplemente corresponde a la asignación de algunas páginas del libro de texto.

Se ha mantenido un esquema donde el o la docente es el dueño del conocimiento y se emplea de manera reiterada: la clase magistral-contenido-práctica-revisión en pizarra. Esto implica que el planeamiento que hace el o la docente de su lección se ajusta a ese esquema.

Sin embargo, de acuerdo con los programas de Matemáticas se requiere de un planeamiento didáctico de la lección que utilice la Resolución de Problemas como estrategia metodológica y además, considere la dos etapas indicadas (MEP, 2012, p.41).

Desarrollo

Seguidamente, se detalla el desarrollo de un plan de lección que abarca una semana de trabajo, aproximadamente 5 lecciones. Además, este plan de lección responde a un planeamiento mensual de acuerdo con la circular DM-0033-11-11.

Por tanto, se describen los elementos básicos de un plan de lección o minuta (Rojas, 2014, p.267-271) las habilidades específicas (equivalente a los objetivos) y conocimientos, las actividades de mediación descritas de manera detallada incluyendo los cuatro pasos para la primera etapa y los ejercicios y problemas para la segunda etapa.

Conocimientos	Habilidades Específicas
Función lineal	10) Representar gráficamente una función lineal.
	11) Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
	12) Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.

(MEP, 2012, p.410)

Actividades de Mediación:

La profesora iniciará la clase de la siguiente forma, presentación del problema.

I Etapa

😊 Problema:

La empresa “Pura Vida S.A” produce juegos de mesa que promueven la conservación del medio ambiente. Dado que el costo de producir cada juego fue de ₡1250 y se hizo una inversión inicial de ₡3 500 000, se proyecta que el precio de venta para cada juego sea de ₡2750.

- Determine la expresión algebraica que brinda la utilidad “U” que genera la empresa en función de la cantidad de artículos producidos (suponiendo que todo lo que se produce se vende)
- Grafique dicha relación en un sistema de ejes cartesianos.
- Determine cuántos artículos es necesario vender para que la empresa empiece a generar ganancias.

Nota: Problema propuesto en las indicaciones puntuales de los programas oficiales del MEP (2012, p.410)

Solución del Problema:

- Determine la expresión algebraica que brinda la utilidad “U” que genera la empresa en función de la cantidad de artículos producidos (suponiendo que todo lo que se produce se vende).

Si x representa la cantidad de los artículos vendidos, la ganancia por cada producto se puede calcular mediante la diferencia entre precio de venta y el costo, entonces las utilidades se calculan mediante:

$$U(x) = (2750 - 1250)x - 3\,500\,000,$$

otra forma de escribir la ecuación es la siguiente:

$$U(x) = 2750x - (1250x + 3\,500\,000)$$

en resumen se pueden calcular las utilidades así: $U(x) = 1500x - 3\,500\,000$

- Grafique dicha relación en un sistema de ejes cartesianos.

Las y los estudiantes pueden hacer una tabla para visualizar los valores

Cantidad de artículos x	1	2	3	4	5
Utilidad U(x)	-3 498 500	-3 497 000	-3 495 500

Los estudiantes pueden encontrarse con la dificultad de que requieren muchos cálculos antes de hallar cuando no hay pérdidas, por lo tanto se debe preguntar ¿Cómo hacerlo más rápido? ¿Cuántos artículos debe vender la empresa para tener equilibrio (sin pérdidas ni ganancias)? Los estudiantes deben pensar en la ecuación

$$0 = 1500x - 3500000$$

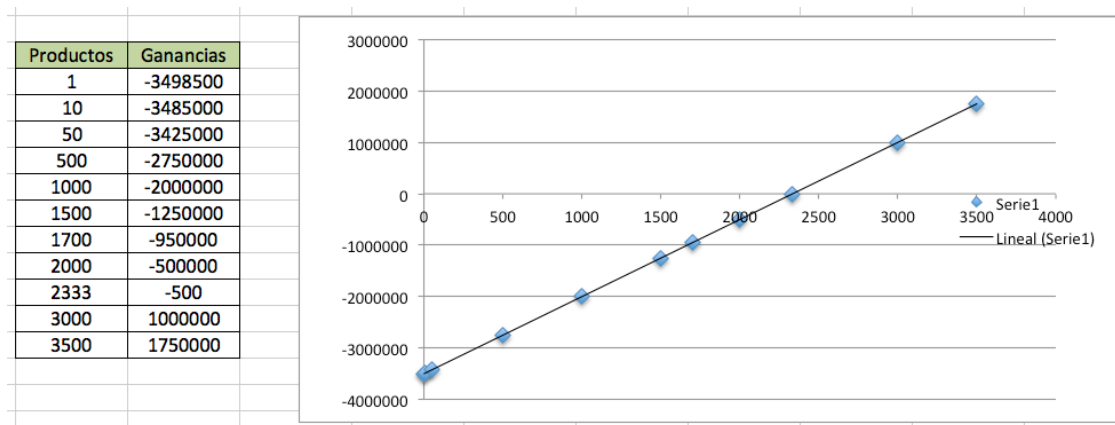
$$\frac{3500000}{1500} = x$$

$$\frac{7000}{3} = x$$

$$2333,33 = x$$

Cantidad de artículos x	2333,33	2334	3 000			
Utilidad U(x)	0	1000	1 000 000			

Al colocar algunos valores en la representación gráfica se verá de la siguiente forma:



- c. Determine cuántos artículos es necesario vender para que la empresa empiece a generar ganancias.

Después de 2334 artículos la empresa comienza a percibir utilidades.

Cierre o clausura:

El o la docente utilizando las respuestas brindadas por los estudiantes para la solución del problema definirá cuatros conocimientos:

- **Representación de una función lineal**, el docente utilizará el trazo realizado en la pizarra e indicará que es una representación de una función lineal, la cual puede expresarse de la siguiente forma:

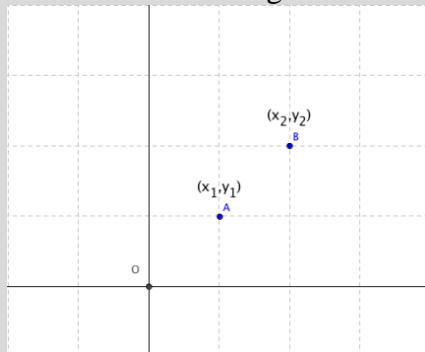
$$f(x) = m x + b \text{ o } y = m x + b$$

- **La pendiente**, el docente utilizará como ejemplo la ecuación

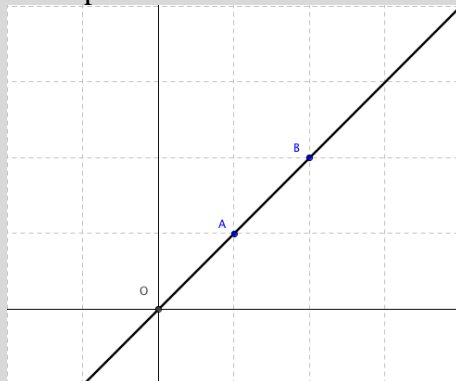
$$U(x) = 1500x - 3\,500\,000.$$

Con el objetivo de fortalecer el proceso de *Razonar y Argumentar* (MEP, 2012, p.24) el docente puede realizar la **demostración de la pendiente de una función lineal**, usando las siguientes ideas:

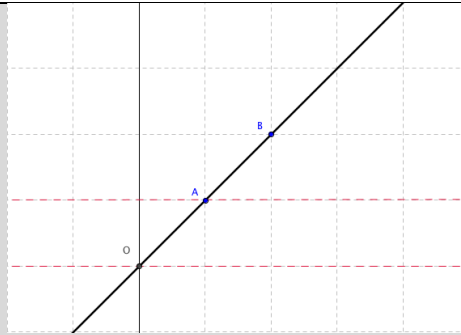
Sean $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, considere a O como el origen. Al representar estos dos puntos en el plano cartesiano se observará de la siguiente forma:



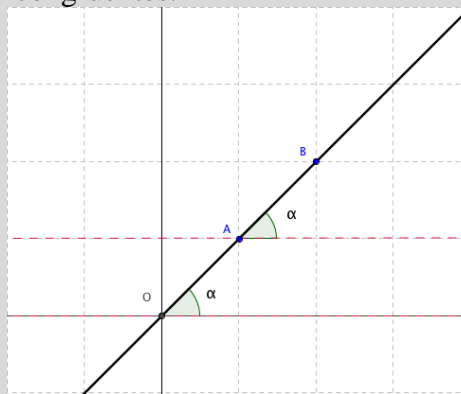
Considere la recta que pasa por los puntos O-A-B



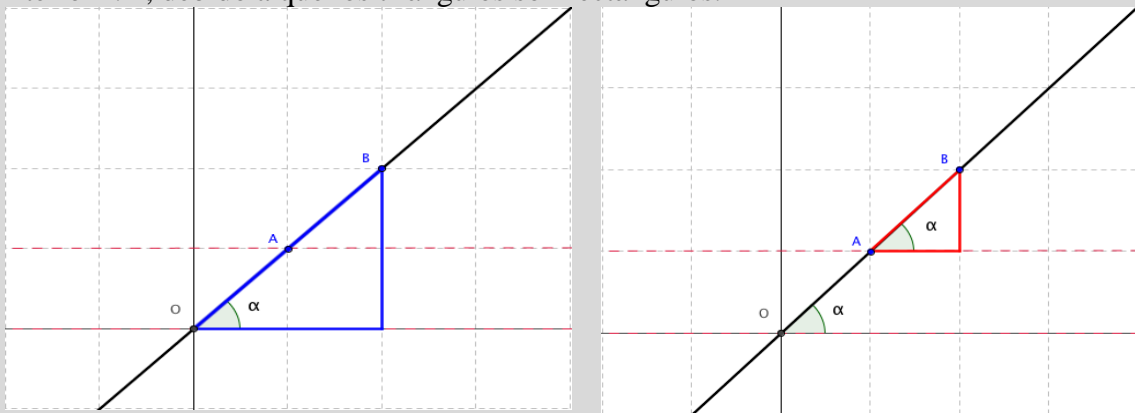
Por el punto O y A, se pueden trazar dos rectas paralelas como las siguientes (destacadas mediante líneas punteadas rojas):



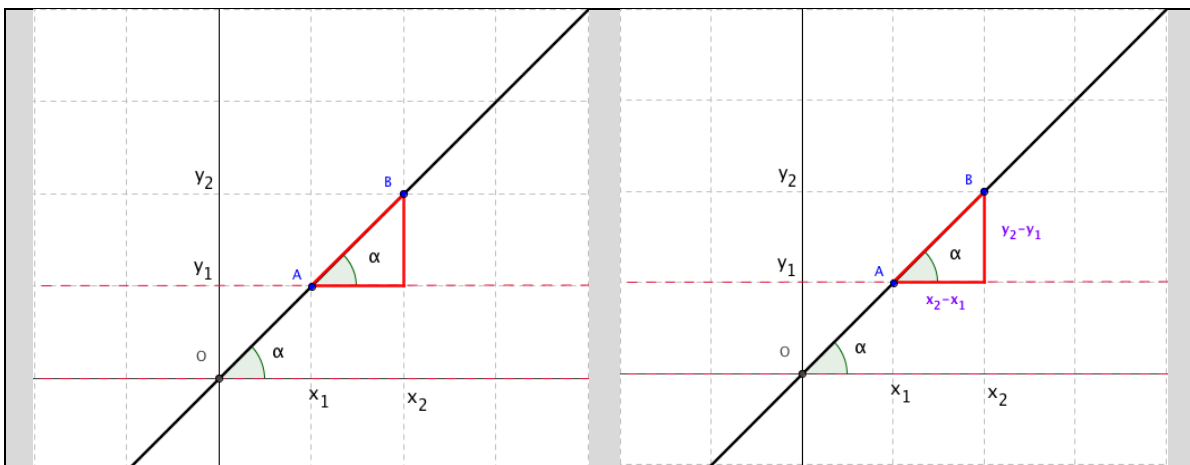
Entonces la recta OB es una recta transversal entre dos rectas paralelas, esto implica que los ángulos correspondientes son congruentes:



Se sigue que el triángulo destacado en azul y el destacado en rojo son semejantes, por el criterio A.A, debido a que los triángulos son rectángulos.

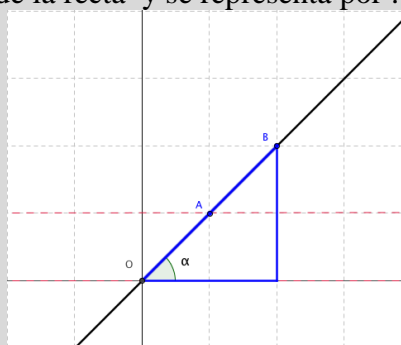


Ahora bien, respecto a las longitudes de los lados de los triángulos, la distancia entre las ordenadas corresponde a $x_2 - x_1$, la distancia entre las abscisas corresponde a $y_2 - y_1$, como se observa a continuación:



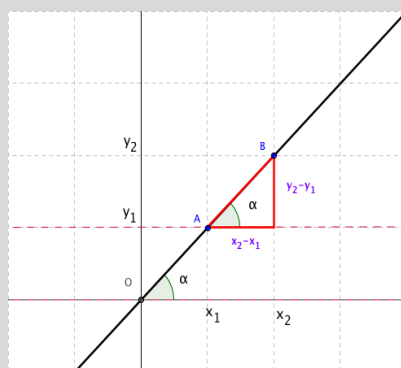
Al valor de α en el triángulo azul, se le aplica la razón trigonométrica tangente y se obtiene un valor **m**, que corresponde a la inclinación de la recta y se representa por :

$$\tan \alpha = m$$



Finalmente, si se desea determinar α en el triángulo rojo (que corresponde a la pendiente, inclinación o amplitud del ángulo) se puede utilizar la razón trigonométrica de la tangente para determinar el ángulo que corresponde a :

$$\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Se sigue que $m = \tan \alpha$ y como $\tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se deduce que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, que corresponde a la pendiente de la recta.

El docente puede emplear la siguiente definición:

Pendiente de una función lineal

En una función lineal f , dado por $f(x) = mx + b$, la inclinación respecto al eje X, de la recta a la que pertenecen los puntos de la gráfica de f se denomina pendiente y está representada por m . Si no se tiene el criterio de f , pero se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la gráfica de f , entonces se puede calcular el valor de m con la fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Recuperado de <http://www.slideshare.net/steven0911/recordemos-la-definicion-de-una-funcion-lineal>

- **Intersección con el eje de las ordenadas**, usando como ejemplo la ecuación

$$U(x) = 1500x - 3\,500\,000, \text{ e indicando que se resumen en } (0, b)$$

- **Intersección con el eje de las abscisas**, usando como ejemplo el punto $(2333,33 ; 0)$ en la representación gráfica. Rápidamente calculado por $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$

Seguidamente, se propone que se determine la pendiente y la intersección con el eje de las ordenadas de la recta representada por el criterio $y = mx + b$, dados dos puntos de ella. (El o la docente en este momento debe retomar conocimientos de Geometría, mediante preguntas como: ¿Cuántos puntos son necesarios para establecer la recta que pasa sobre todos los puntos representados en la pizarra? ¿Cuántos puntos determinan una recta?)

Ejemplo:

A partir de $(0, 5)$ y $(3, 0)$, determine la ecuación de la recta.

Se espera que los estudiantes con base en la información brindada anteriormente, utilicen que $(0, b) = (0, 5)$ y que $\left(\frac{-b}{m}, 0\right) = \left(\frac{-5}{3}, 0\right)$. Hasta construir la siguiente ecuación:

$$y = -\frac{5}{3}x + 5$$

II Etapa

En las siguientes 3 lecciones las y los estudiantes realizarán los siguientes ejercicios y problemas. De los ejercicios y problemas propuestos serán revisados en la pizarra aquellos que son de interés para la docente por el tipo de estrategia de solución que requiere o por las dificultades que representa para el estudiantado.

- A. Determine la ecuación de la recta y represente cada recta en el plano cartesiano. (Reproducción)
 - a) Tiene pendiente -3 y ordenada en el origen -1 .
 - b) Tiene por pendiente 4 y pasa por el punto $(-3, 2)$.
 - c) Pasa por los puntos A $(-1, 5)$ y B $(3, 7)$.
 - d) Pasa por el punto P $(2, -3)$ y tiene una pendiente igual a -1 .

B. Resuelva cada uno de los siguientes problemas (Conexión):

- a) En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2,5 cm. Establecer una función que represente la altura de la planta en función del tiempo y representarla gráficamente. Sugerencia: Considere las 10 semanas como $t = 0$.
- b) Por el alquiler de un automóvil 4x4, en temporada alta cobran 183 € de depósito más 3 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar? ¿Si se cancelan 1542€, cuántos kilómetros se recorrió?

C. Resuelva cada uno de los siguientes problemas (Reflexión):

- a) Sea f una función tal que $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$.
- b) Calcular los valores de a y b , sabiendo que $f(3) = p$ y $f(q) = 4$, $p, q \in \mathbb{R}$ y $p \neq 0, q \neq 0$.
 - i. Si $p = 1$ y $q = 1$, ¿Cuál es la intersección con el eje x ?
 - ii. Si $p = -4$ y $q = -4$, ¿Cuál es la intersección con el eje y ?
- c) Sustituya a y b por dos números enteros positivos y grafique.
- d) Sustituya a y b por dos números enteros negativos y grafique.
- e) Sustituya a y b por un número positivo y otro negativo y grafique.
- f) Con base en las gráficas anteriores responda las siguientes preguntas:
 - i. Observa alguna diferencia entre las gráficas. Describa esas diferencias.
 - ii. Compare el comportamiento de las gráficas donde usted eligió utilizar un valor positivo para a y un valor negativo para a . Describa su comportamiento.
 - iii. Compare el comportamiento de las gráficas donde usted eligió utilizar un valor positivo para b y un valor negativo para b . Describa su comportamiento.
 - iv. Escriba una conjetura sobre el comportamiento de las rectas y los signos de los valores de a y b .

Tiempo:

2 lecciones para la ejecución de la I Etapa.

3 lecciones para la ejecución de la II Etapa.

Recordatorios para el profesor (a) en el desarrollo de la lección:

1. Aunque el dominio es discreto, ya los estudiantes han tenido contacto con conocimientos relacionados con la existencia de los números reales y las funciones. En noveno año se trabaja la graficación de puntos y orienta al estudiantado a visualizar una tendencia entre los puntos representados (aun cuando se utilicen modelos donde el dominio es discreto), por tanto ya se puede realizar un trazo continuo. Es importante comentar con los estudiantes la graficación de

funciones con dominios discretos por medio de trazos continuos con el fin de visualizar la información en mejor forma.

2. Es importante destacar que el modelo que describe el crecimiento de la planta es lineal, si el crecimiento es directamente proporcional al tiempo significa que en $t = 0$ y la planta debe medir 0 cm ($\text{Altura} = kt$), esto se debe recordar porque es un conocimiento adquirido en primaria.
3. Esta notación $f(0) = 3$ y $f(1) = 4$ se introdujo previamente con los conocimientos que anteceden a estas habilidades.
4. Se promueve el uso de moneda extranjera con el objetivo de favorecer habilidades adquiridas en el área de Medidas durante la primaria.

Consideraciones finales

- El plan de lección debe ser diferente al planeamiento tradicional basado en el esquema de clase magistral-contenido-práctica-revisión en pizarra.
- Se debe considerar en el planeamiento didáctico la integración de habilidades.
- Se debe planificar un problema y realizar la solución para verificar que propicie, favorece y desarrolle el conjunto de habilidades seleccionadas.
- Se debe incluir en el plan de lección el cierre o clausura (los elementos teóricos a formalizar en concordancia con las habilidades específicas seleccionadas).
- Además, se deben considerar las dos etapas indicadas por el programa de Matemáticas (MEP, 2012, p.41-44).
- Finalmente, en la selección de los ejercicios y problemas, se deben incluir diferentes niveles de complejidad: Reproducción, Conexión y Reflexión (MEP, 2012, p.32-34).

Bibliografía

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2014). Documento de integración de habilidades para Décimo año. San José, Costa Rica: autor. Disponible en <http://www.reformamatematica.net/programas/index.php/habilidades/article/view/12>

Ministerio de Educación Pública (2012). Programas de estudio de matemáticas. I y II Ciclo de la Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada. San José, Costa Rica: autor. Disponible en <http://www.reformamatematica.net/proyecto/docs/programas.pdf>

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2011). Disposiciones sobre el Planeamiento Didáctico en los Centro Educativos (DM-0033-11-11). San José, Costa Rica: autor.

Rojas, A (2012). Planeamiento Didáctico (Versión preliminar). Costa Rica: EUNED.

ⁱ Se entiende por *Plan de lección o minuta*, la descripción del trabajo realizado a través del problema planteado en las 5 lecciones que se proponen para desarrollar las dos etapas propuestas en el programa de Matemáticas.